

EXERCICE 1.

4,5 points

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle donnée.

① $y' = e^{-x} - \frac{1}{x^3}$ sur $]0; +\infty[$.

② $y' = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[0; +\infty[$.

③ $y' = -2e^{6x-7} + xe^{-x^2}$ sur \mathbb{R} .

EXERCICE 2.

5,5 points

Dans chaque cas, déterminer la solution F de l'équation différentielle donnée.

① $y' = x^3 + x + \frac{1}{x^2}$ sur \mathbb{R}_+^* , et $F(1) = \frac{3}{4}$.

② $y' = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x^5}$ sur \mathbb{R}_+^* , et $F(-1) = 1$.

③ $y' = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^3}$ sur \mathbb{R} , et $F(0) = -\frac{1}{16}$

EXERCICE 3.

5 points

Déterminer les solutions de l'équation différentielle en cherchant une solution particulière φ de la forme indiquée.

① $2y' + y = x + 1$ avec $\varphi(x) = mx + p$

② $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ avec $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$

EXERCICE 4.

5 points

Une colonie de 2000 bactérie est placée dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence.

On admet que l'évolution en fonction du temps t en heure ($t \geq 0$) du nombre d'individus $N(t)$ de cette colonie suit l'équation différentielle $(E) : N'(t) = 3N(t) - 0,005(N(t))^2$.

Pour déterminer $N(t)$, on se propose de remplacer (E) par une équation plus simple puis de la résoudre.

① On suppose que la fonction N ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ et on définit sur $[0; +\infty[$ la fonction g par $g(t) = \frac{1}{N(t)}$. Déterminer $g'(t)$.

② Montrer que N est solution de (E) si, et seulement si, g est solution de $(E') : y' = -3y + 0,0005$.

③ Résoudre (E') puis résoudre (E) .

(a) Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale indiquée dans l'énoncé.

(b) Calculer le nombre de bactéries présentes au bout de 10 minutes. Arrondir à l'unité.